Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій



**ЗВІТ**

**Про виконання лабораторної роботи № 10**

«Чисельні методи інтегрування»

**з дисципліни «Чисельні методи»**

**Лектор:**

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

**Виконав:**

студ. групи ПЗ-15

Марущак А. С.

**Прийняв:**

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_ 2022 р.

∑ = \_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Львів – 2022

**Тема роботи:** Чисельні методи інтегрування.

**Мета роботи:** ознайомлення на практиці з методами чисельного інтегрування.

**Теоретичні відомості**

Багато наукових, технічних і практичних задач зводяться до інтегрування функцій. Зокрема, обчислення площ поверхонь, об’ємів тіл, моментів інерції і т.п. Нагадаємо, що геометричний зміст найпростішого означеного інтеграла

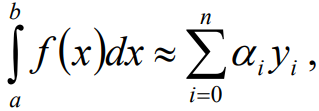
від додатньо визначеної неперервної функції f (x) ≥ 0 полягає у тому, що числове значення величини I – це площа, обмежена кривою y = f (x) , віссю абсцис та прямими x = a , x = b.

У випадках, коли підінтегральну функцію задано аналітично, причому вона є інтегровною, означений інтеграл обчислюють безпосередньо за допомогою формули Ньютона-Лейбніца. Ця формула полягає в тому, що означений інтеграл дорівнює приросту первісної F(x) на відрізку інтегрування

Однак на практиці цією формулою не завжди можна скористатися через дві основні причини:

1. функція f (x) не є інтегровною, тобто її первісну F(x) не можна зобразити елементарними функціями;
2. значення функції f (x) є відомим тільки на множині скінченної кількості точок тобто функцію задано у вигляді таблиці.

У цьому випадку застосовують методи чисельного інтегрування, які ґрунтуються на інтерполюванні підінтегральної функції за допомогою інтерполяційних поліномів. Така інтерполяція дає змогу наближено замінити означений інтеграл скінченною сумою

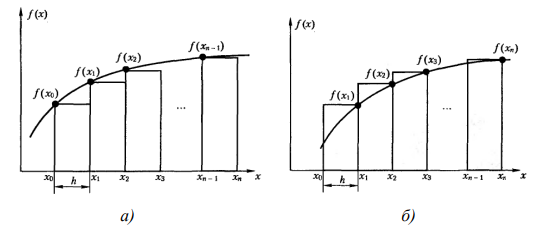
****

Це співвідношення називають квадратурною формулою, а його праву частину – квадратурною сумою. У залежності від способу її обчислення існують різні методи чисельного інтегрування (квадратурні формули) – метод прямокутників, трапецій, парабол (Сімпсона) та ін.

**Метод прямокутників**

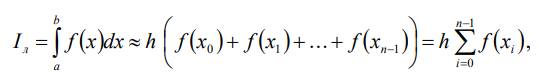
Найпростішим методом наближеного обчислення інтеграла є метод прямокутників, суть якого зводиться до знаходження означеного інтеграла як суми площ n прямокутників висотоюта основою , отриманих шляхом розбиття відрізка інтегрування [a,b] на n рівних частин.

Розбиття на прямокутники виконують зліва направо або справа наліво. При цьому висотою кожного елементарного прямокутника буде значення функції y = f (x) у крайній лівій (рис. 1, а) або крайній правій точці (рис. 1, б) відповідно.

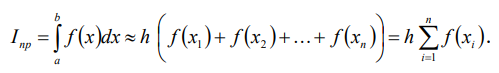
****

**Рис. 1.** Геометрична інтерпретація методу лівих (а) та правих (б) прямокутників

Для першого випадку отримуємо формулу лівих прямокутників

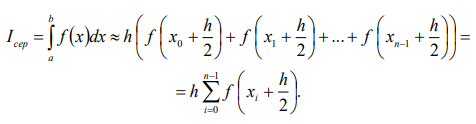


а для другого - формулу правих прямокутників

****

Тут крок інтегрування Якщо функція f (x) монотонно зростає на відрізку [a,b] , то із використанням формул лівих і правих прямокутників отримують наближене значення інтеграла з недостачею та з надлишком відповідно.

На практиці застосовують точнішу розрахункову формулу середніх (центральних) прямокутників, у результаті чого отримують точніше значення інтеграла

****

У цій формулі враховано значення функції в середніх точках елементарних відрізків.

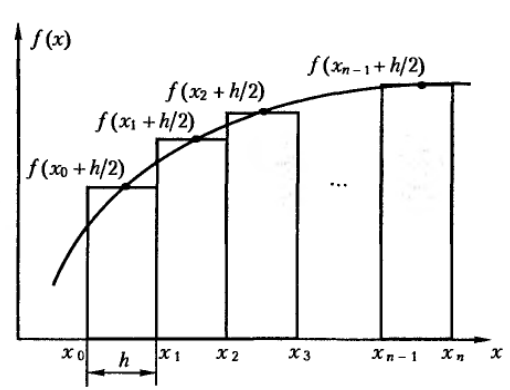
****

Рис. 2. Геометрична інтерпретація методу середніх прямокутників

**Метод трапецій**

Метод трапецій полягає в тому, що відрізок інтегрування [а,b] розбивають на n рівних відрізків, а криву, описану підінтегральну функцією f (x), замінюють на кожному із цих відрізків кусково-лінійною функцією ϕ(x), отриманою стягуванням хорд, які проходять через точки та . Значення інтеграла знаходять як суму площ прямокутних трапецій (Рис. 2) з висотою

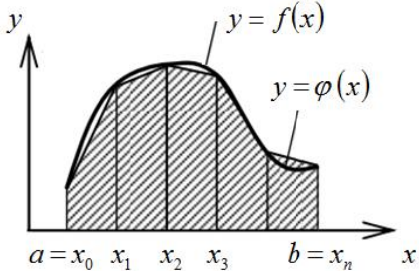
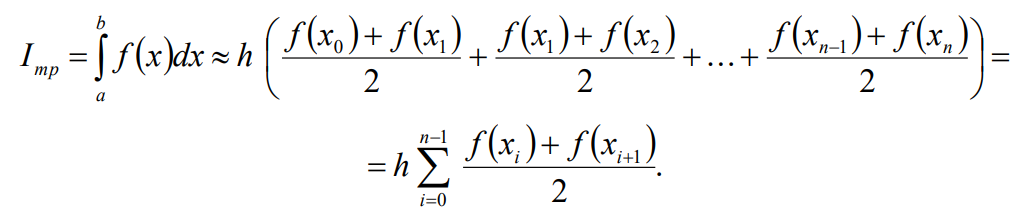


Рис. 3. Геометрична інтерпретація методу трапецій

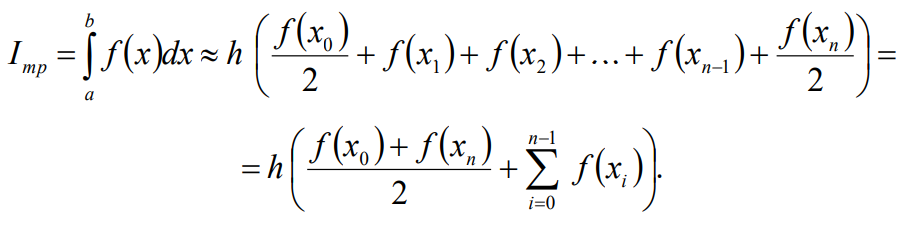
Площу кожної i -ої елементарної трапеції визначають за формулою



Відповідно на всьому відрізку інтегрування [a,b] площу складеної фігури визначають сумою площ усіх елементарних трапецій. У результаті отримують таку формулу



Оскільки в наведеній формулі під знаком суми величини

**

**Метод Сімпсона**

Даний метод полягає в тому, що криву, описану підінтегральною функцією f(x), на елементарних відрізках заміняють параболою. Поділимо відрізок інтегрування [a,b] на парну кількість n рівних частин з кроком На кожному елементарному відрізку підінтегральну функцію f(x) замінимо інтерполяційним поліномом другого степеня (квадратичною параболою). Тоді обчислення означеного інтеграла зводиться до обчислення суми площ криволінійних трапецій (рис. 4).

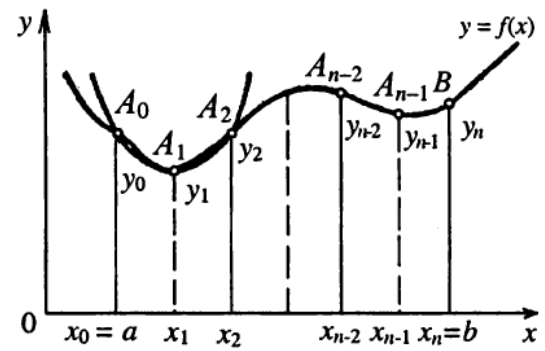
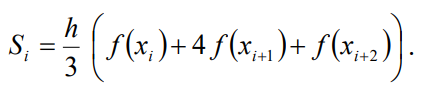
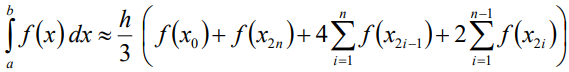
**

Рис. 4 Геометрична інтерпретація методу Сімпсона

Площу кожної елементарної криволінійної трапеції визначають за формулою Сімпсона

**

Тоді розрахункова формула методу Сімпсона набуде такого вигляду

**

**Індивідуальне завдання**

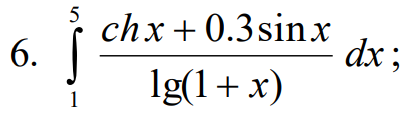
1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.
2. Скласти програму чисельного інтегрування у відповідності до варіанту:

1) методом лівих, правих та середніх прямокутників;

2) методом трапецій;

3) методом Сімпсона.

**Варіант завдання**



**Хід роботи**

Проведемо деякі обчислення вручну для кращого розуміння матеріалу. Для простоти поділимо відрізок , на якому шукаємо інтеграл на 10 точок. Тоді крок

Складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках поділу відрізка.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 1 | 5.965 | 6.104 |
| 1 | 1.4 | 6.435 | 6.934 |
| 2 | 1.8 | 7.603 | 8.457 |
| 3 | 2.2 | 9.523 | 10.837 |
| 4 | 2.6 | 12.446 | 14.407 |
| 5 | 3 | 16.792 | 19.686 |
| 6 | 3.4 | 23.191 | 27.431 |
| 7 | 3.8 | 32.556 | 38.744 |
| 8 | 4.2 | 46.218 | 55.225 |
| 9 | 4.6 | 66.092 | 79.196 |
| 10 | 5 | 94.997 | - |

Тоді отримаємо наступні результати, використовуючи запропоновані методи:

Метод лівих прямокутників: .

Метод правих прямокутників: .

Метод середніх прямокутників:

Метод середніх прямокутників:

Метод Сімпсона:

Наступна мета – реалізувати подані методи у вигляді програми, використовуючи отримані знання, для того щоб провести більш точні розрахунки.

Для того щоб обчислити інтеграл з певною точністю, використовуватимемо метод подвійного перерахунку: збільшуватимемо к-ть проміжків допоки різниця між попереднім і отриманим значенням інтегралу не стане меншою за задану точність, тобто повторюватимемо обчислення, допоки . При цьому крок h зменшуватиметься вдвічі: .

Тоді подані методи запишемо так:

using System.Linq;

namespace FunctionIntegrator.Lib

{

public static class Integrator

{

//Метод лівих прямокутників.

public static decimal LeftRectangles(Func<decimal, decimal> f, decimal a, decimal b, out long intervals, decimal eps = 0.001M)

{

intervals = 2; // Початкова к-ть інтервалів - 2.

decimal I = 0M, I\_prev = 0M, h = 0M;

do

{

h = (b - a) / intervals; // Обчислюємо крок.

I\_prev = I; //Зберігаємо попереднє значення

List<KeyValuePair<decimal, decimal>> xyPairs = new();

for (decimal x = a; x < b; x += h)

xyPairs.Add(KeyValuePair.Create(x, f(x))); // Додаємо в список нову пару (x, f(x))

I = xyPairs.Sum(pair => h \* pair.Value); // Обчислюємо суму площ прямокутників

intervals \*= 2; // Вдвічі збільшуємо к-ть інтервалів

} while (Math.Abs(I - I\_prev) > eps); // Допоки не досягнемо заданої точності

return I; // Повертаємо результат

}

//Метод правих прямокутників.

public static decimal RightRectangles(Func<decimal, decimal> f, decimal a, decimal b, out long intervals, decimal eps = 0.001M)

{

intervals = 2; // Початкова к-ть інтервалів - 2.

decimal I = 0M, I\_prev = 0M, h = 0M;

do

{

h = (b - a) / intervals; // Обчислюємо крок.

I\_prev = I; //Зберігаємо попереднє значення

List<KeyValuePair<decimal, decimal>> xyPairs = new();

for (decimal x = a + h; x <= b; x += h)

xyPairs.Add(KeyValuePair.Create(x, f(x))); // Додаємо в список нову пару (x, f(x))

I = xyPairs.Sum(pair => h \* pair.Value); // Обчислюємо суму площ прямокутників

intervals \*= 2; // Вдвічі збільшуємо к-ть інтервалів

} while (Math.Abs(I - I\_prev) > eps); // Допоки не досягнемо заданої точності

return I; // Повертаємо результат

}

public static decimal CentralRectangles(Func<decimal, decimal> f, decimal a, decimal b, out long intervals, decimal eps = 0.001M)

{

intervals = 2; // Початкова к-ть інтервалів - 2.

decimal I = 0M, I\_prev = 0M, h = 0M;

do

{

h = (b - a) / intervals; // Обчислюємо крок.

I\_prev = I; //Зберігаємо попереднє значення

List<KeyValuePair<decimal, decimal>> xyPairs = new();

for (decimal x = a; x < b; x += h)

xyPairs.Add(KeyValuePair.Create(x, f(x + (h/2)))); // Додаємо в список нову пару (x, f(x + h/2))

I = xyPairs.Sum(pair => h \* pair.Value); // Обчислюємо суму площ прямокутників

intervals \*= 2; // Вдвічі збільшуємо к-ть інтервалів

} while (Math.Abs(I - I\_prev) > eps); // Допоки не досягнемо заданої точності

return I; // Повертаємо результат

}

public static decimal Trapezoid(Func<decimal, decimal> f, decimal a, decimal b, out long intervals, decimal eps = 0.001M)

{

intervals = 2; // Початкова к-ть інтервалів - 2.

decimal I = 0M, I\_prev = 0M, h = 0M;

do

{

h = (b - a) / intervals; // Обчислюємо крок.

I\_prev = I; //Зберігаємо попереднє значення

List<KeyValuePair<decimal, decimal>> xyPairs = new();

for (decimal x = a; x <= b; x += h)

xyPairs.Add(KeyValuePair.Create(x, f(x))); // Додаємо в список нову пару (x, f(x))

I = xyPairs.Select((pair, i) => (i == 0 || i == xyPairs.Count - 1) ? (pair.Value / 2) : pair.Value).Sum(y => h\*y); // Обчислюємо суму площ трапецій

intervals \*= 2; // Вдвічі збільшуємо к-ть інтервалів

} while (Math.Abs(I - I\_prev) > eps); // Допоки не досягнемо заданої точності

return I; // Повертаємо результат

}

public static decimal Simpson(Func<decimal, decimal> f, decimal a, decimal b, out long intervals, decimal eps = 0.001M)

{

intervals = 2; // Початкова к-ть інтервалів - 2.

decimal I = 0M, I\_prev = 0M, h = 0M;

do

{

h = (b - a) / intervals; // Обчислюємо крок.

I\_prev = I; //Зберігаємо попереднє значення

List<KeyValuePair<decimal, decimal>> xyPairs = new();

for (decimal x = a; x <= b; x += h)

xyPairs.Add(KeyValuePair.Create(x, f(x))); // Додаємо в список нову пару (x, f(x))

I = xyPairs.Select((pair, i) =>

i == 0 || i == xyPairs.Count - 1 ? pair.Value

: i % 2 == 0 ? 2 \* pair.Value : 4 \* pair.Value).Sum(y => (h / 3) \* y);

intervals \*= 2; // Вдвічі збільшуємо к-ть інтервалів

} while (Math.Abs(I - I\_prev) > eps); // Допоки не досягнемо заданої точності

return I; // Повертаємо результат

}

}

}

Тоді, подамо нашу функцію на вхід програми і обчислимо інтеграли з точністю

**Результат** виконання програми:

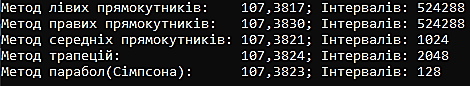
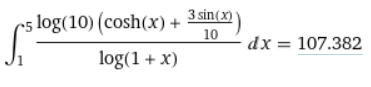


Рис 5. Результати виконання програми

**Аналіз результатів:**

Як бачимо, усі 5 методів дали практично один і той самий результат. Це означає, що завдання з високою ймовірністю було виконано правильно. Перевіримо цей результат за допомогою іншого калькулятора:



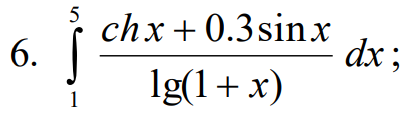
Як бачимо, результат збігається з нашим.

При тому, що було передбачувано, найбільш оптимальним виявився метод Сімпсона, в той час, як найменш оптимальними є методи лівих та правих прямокутників.

**Висновок:**

Виконуючи цю лабораторну роботу, ми ознайомились на практиці з методами чисельного інтегрування.

За допомогою цих знань ми реалізували програму, що змогли знайти наступний інтеграл



використовуючи методи лівих, правих та середніх прямокутників, трапецій та парабол.

Ми отримали наступне наближення

з похибкою